쉼터 2

수학으로 머리를 식혀보자

Ian Stewart(고려 대학교 문탁진, 문경식 번역)

골프공의 결정학*

보잘 것 없는 골프공에도 심오한 수학이 적용된다는 사실을 상상할 수 있을까? 물론 필자도 부다페스트 공과 대학의 엔지니어인 티보 타르나이(Tibor Tarnai)로부터 그러한 사실을 접하기 전까지는 꿈에도 그런 생각을 하지 못했다.

골프공은 완전한 구가 아니기에 재미있는 구조를 갖는다. 기체역학적인 성능을 향상시키기 위해 움푹 패인 홈들이 공 표면을 덮도록 고안되어 있다. 업자들은 놀라울 정도로 다양한 패턴의 홈을 공에 새기고 있다. 그리고 대개 그것들은 대칭적이며 여기서 수학이 개입하게 된다. 여기서의 수학은 결정학자들이 결정격자의 대칭성을 분석할 때 사용하는 것과 같은 종류이다.

대칭성과 홈의 수를 연관시키면 252, 286, 332, 336, 360, 384, 392, 410, 416, 420, 422, 432, 440, 480, 492, 그리고 500과 같이 홈의 개수에는 다른 숫자들보다 더 자주 볼 수 있는 '마법'의 수가 존재한다는 것을 알 수 있다. 이들 숫자는 시중에 판매되는 제품에서 찾아 볼 수 있으며 어떤 제조업자는 1,212개의 홈을 가진 공을 만들기도 했지만 경기용이 아니고 골프공도 그와 같이 정교하게 만들 수 있다는 것을 보여 주기 위해서였다고 한다.

공의 홈들은 아주 고르게 공 표면을 덮고 있어야 하는데 그렇지 않으면 사용할 때 공이 목적하는 위치에서 벗어나기 쉬우며 공기의 저항은 홈의 밀도에 의존하기 때문이다. 그런데 공을 디자인할 때의 문제는 표면에 작은 원모양의 디스크를 균일하게 분포시켜야 된다는 것이다. 하지만 실제적으로 고려해야 할 것이 있다. 공을 2개의 반구로부터 성형할 때 최소한 하나의 분리선이 생기게 마련이며 큰 원은 어떤 홈과도 만나지 않아야 한다. 대부분의 디자인을 보면 기체역학적인 균형을 유지하기 위해 가짜 분리선들이 대칭적으로 배열되어 있다. 이러한 선들이 바로 공을 대칭적으로 운동하게 해준다.

보통 대칭적이라는 말은 대개 '비례적으로 균형이 잡혔다' 던지 우아한 것을 표시할 때 쓰인다. 즉 윌리암 블래이크의 저서 "Tyger"에 나오는 것처럼 '엄청난 대칭'과 같은 의미로 사용된다. 그러나 수학에서는 보다 엄밀하게 정의한다. 즉 이것은 모양 자체를 의미하는 것이 아니라 변형, 즉 수학적 규칙에 의해 모양을 바꾸는 것을 뜻한다. 만일 어떤 물체가 변형 후에도 이전과 정확히 동일한 공간에 딱 들어맞게 된다면 그와 같은 변형은 그 물체에 대해 대칭이라고 한다. 예를 들면 사각형은 8개의 대칭을 갖는다(단, 구부리거나 잡아 늘리는 변형은 제외한다). 이들은 시계 반대 방향으로 90°, 180°, 270°만큼 회전시킨 것과 축이나 대각선에 대해 반사시킨 것들이다. 8번째 대칭은 원래의 사각형을 유지하는 별것 아닌 변형이다.

그 물체에 대한 대칭(symmetry)은 그룹을 형성한다. 즉 2개의 대칭변환을 차례로 실행시키면 이것 역시 이들의 조합이나 결과로 생기는 또 하나의 대칭변형이 된다. 예를 들면 사각형을 90°회전시킨 후 다시 180°회전시키면 결국 270°만큼 회전시킨 것이 된다. 즉 그룹 요소가 된다. 이와 같이 그룹의 성질의 하나로 별것아닌 대칭을 포함시킨다. 만일 그것을 생략한다면 2개의 대칭으로 만들어지는 것을 하나의 또다른 대칭으로 생각할 수 없는 것이다. 예를 들면 90°회전한 후 270°회전한 것은 360°회전한 것과 마찬가지이다. 왜냐하면 360°회전이라는 것은 사각형의 모든 점들이 원래 위치에 돌아오기 때문에 별것아닌 변형의 하나인 것이다.

그룹 구조를 통해서 대칭되는 물체들을 여러 유형으로 분류할 수 있다. 두 물체의 대칭 변형 그룹이 이론상 같은 구조를 갖는다면 두 물체는 대칭 유형이 같다고 한다. 예를 들면 사각형은 각 꼭지점들의 모서리를 둥글게 만든 사각형과 대칭 유형이 같다.

2차원과 3차원의 기하학적 개념에서 대칭의 가장 중요한 유형은 회전(rotation)과 반사(reflection)이다. 2차원에서

*Scientific American, p. 80, Feb. 1997.

의 회전은 일정한 점을 중심으로 정해진 각도만큼 물체를 회전(spin)시키는 것이며 3차원에서는 일정한 축을 중심으로 일정한 각만큼 회전시키는 것이다. 2차원에서의 반사는 하나의 정해진 거울선을 중심으로 한 쪽에 있는 점을 같은 거리에 있는 다른 한 쪽으로 이동시키는 것이다. 3차원에서도 마찬가지이지만 단지 거울선이 거울면으로 되는 것이다.

대칭 그룹의 가장 큰 특징은 차수(order)를 갖는다는 것이다. 즉 뚜렷한 대칭 변형이 가능한 수이다. 따라서 사각형의 대칭 변형의 차수는 8이다. 3차원에서 중요한 대칭성을 갖는 것으로는 4면체, 6면체, 8면체, 12면체 그리고 20면체가 있다. 이들의 대칭 그룹의 차수는 다음과 같다.

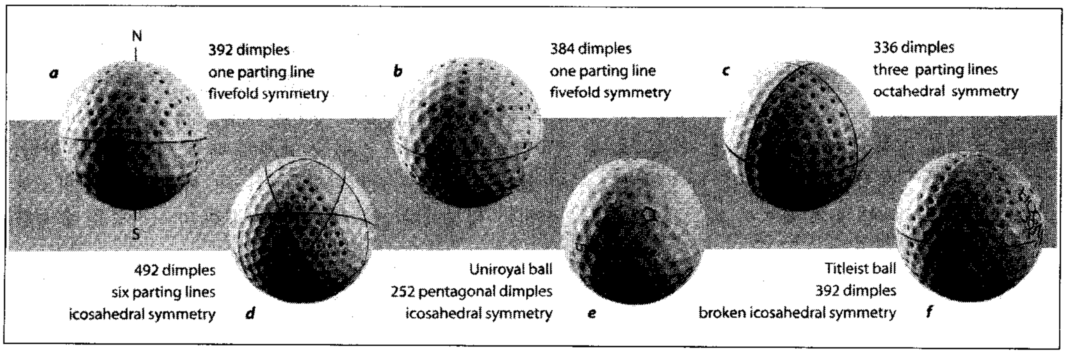
4면체(4개의 3각형면) 24
6면체(6개의 4각형면) 48
8면체(8개의 3각형면) 48
12면체(12개의 5각형면) 120
20면체(20개의 3각형면) 120

어떤 경우이던 대칭 그룹의 차수는 한 면의 모서리 수×면의 수×2 이다. 예를 들면 12면체의 경우 2×12×5=120이 되는 것이다. 위와 같은 면체들이 규칙적인 기하학적 모양을 가지므로 그와 같은 수학적인 관계를 갖는 것이다. 왜 그와 같이 되는지 살펴보기 위해 한가지의 특수면을 선택해 보자. 12면체는 12개의 면 중 어느 것을 골라도 회전이 가능하다. 따라서 선택한 면을 볼 때 5개의 어느 위치로도 회전이 가능하므로 12×5=60이 되는 것이다. 하지만 이와 같은 회전을 하기 전에, 선택한 면은 반사 대칭을 할 수 있으므로 결국 마지막 경우의 수에다 2배를 해줌으로서 답을 구할 수 있다.

12면체와 20면체의 관계와 같이 6면체와 8면체도 대칭 차수가 같다는 것을 주목하자. 이것은 '이중성' 때문인데, 8면체의 각 면들의 중심점은 6면체의 꼭지점을 형성하게 된다. 이것은 결국 6면체와 8면체가 같은 대칭 그룹임을 말해 주며 12면체와 20면체도 마찬가지이다.

3차원에서는 대칭 그룹의 최대차수가 120이 아니다. 그러나 120 이상이 되려면 무한히 많은 대칭수를 가져야 한다. 하지만 홈이 있는 골프공에 만들 수 있는 차수는 유한하므로 대칭의 최대값은 120이라 할 수 있다.

물론 홈의 수는 120 이상이 될 수 있다. 초창기의 골프공에는 2가지 구분되는 패턴이 있었다. 이들 중 한가지는 홈들이 공의 위도를 따라 배열되어 있었으며 이러한 홈들이 비교적 공의 적도 분리선에 놓여 있었다. 대개 이런 골프공은 392개 홈이 있었고 공의 극(N)과 극(S)을 가로지르는 하나의 축을 중심으로 5중(fold)의 회전 대칭수가 있었다.



Golfballs illustrate the subtleties of finite symmetry group.

a : 392개의 홈	b : 384개의 홈	c : 336개의 홈	d : 492개의 홈	e : Uniroyal사의 공	f : Titleist사의 공
1개의 분리선	1개의 분리선	3개의 분리선	6개의 분리선	252개의 5각형 홈	392개의 홈
5중 대칭	5중 대칭	8면체 대칭	20면체 대칭	20면체 대칭	20면체 대칭이 깨짐

그러나 종종 8개의 홈을 별 이유 없이 넣지 않기도 하였다(**그림 b**). 2번째 패턴은 2개의 사각형을 밑면으로 하고 밑면끼리 붙어 있는 피라미드 모양의 등변삼각형 8개가 하나의 모양으로 규칙적으로 조합된 8면체와 같은 대칭이 있는 것이다. 이전의 8면체 골프공에는 336개의 홈을 만들었으며 이것은 지구의 적도와 자오선이 0°, 90° 위치에서 만나는 것

처럼 3개의 분리선이 직각으로 만나는 것이다(**그림 c**).

더욱 난해한 디자인으로 만들어진 것이 있었는데 이것은 6개의 분리선을 가진 20면체 대칭 구조로 되어 있다(**그림 d**). 20면체는 20개의 등변삼각형이 각 꼭지점에서 5개로 배열된 구조로 되어 있다. 이러한 배열 구조는 가정용 레이다 장치에서 사용되는 측정용 돔(geodesic dome)과 바이러스의 단백질 단위체에서도 볼 수 있다. 예를 들면 호흡관에 침투하는 '아데노바이러스(adenovirus)'는 소위 '12-20면체'라고 할 수 있으며 252개의 단백질 단위체가 배열되어 있는데 이 구조는 한 꼭지점을 중심으로 6각형이나 등변삼각형이 5개씩 규칙적으로 나열되어 있다. 유니로얄사(Uniroyal)는 이러한 구조와 똑같은 골프공을 만들게 된다(**그림 e**). 신기하게도 252개의 홈은 5개 면으로 피라미드 모양으로 되어있었다.

1973년 타이트리스트(Titleist)사는 자사의 새로운 골프공 하나를 소개하게 되는데(**그림 f**), 처음 보면 20면체의 형태로 보이지만 그 대칭성이 불완전한 것이었다. 이것은 20면체를 기본으로 한 것이며 홈을 가진 삼각형 면을 각각 쌓아올린 것이다. 하지만 분리선이 없으며, 적도선을 따른 홈의 열들이 2배가 되고 선명한 간격이 생기도록 만들어져 있다. 이러한 패턴은 20면체 대칭성을 깨뜨리지만 실용적으로는 아주 유용한 골프공이 된다.

골프공에 관한 대칭 성질은 이제까지 언급한 내용 이외에 훨씬 다양하고 복잡한 것들도 있다. 특히 필자는 어느 정도 중요는 하지만 미묘하게 다른 대칭 그룹간의 설명하기 힘든 차이 등은 다루지 않았다. 여러분들은 타르나이(Tarnai)가 쓴 'Katach U. Symmetry' (Springer-Verlag, Tokyo, 1996)을 통해 자세한 것을 참조하거나 골프공 몇 개를 직접 구하여 스스로 연구해 보기 바란다.